广义特征值的扰动界限 (I)*

李 仁 仓
(中国科学院计算中心)

PERTURBATION BOUNDS FOR GENERALIZED EIGENVALUES (I)

LI REN-CANG
(Computing Center, Academia Sinica)

Abstract

For the perturbation of generalized eigenvalues of generally regular matrix pairs, it is difficult to estimate perturbation bounds in spite of the existing results. Some bounds to redeem this defect are developed. Then, another version of Henrici type theorem is proved, from which it deduces two upper bounds which could not be deduced from the previous one.

§1. 引　言

到目前为止,关于广义特征值的扰动,已经建立了一些界限估计[1,3],但一般正则对的扰动界限难以算出. 首先,定义某些基本参数,并利用这些参数建立几个关于一般正则矩阵对的广义特征值的扰动定理. 这些定理给出的扰动界限的上界估计，一般是可以算出的.

本文使用的符号与 [3] 一致: $\mathbf{C}^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶复矩阵的全体; $\mathbf{C}^m=\mathbf{C}^{m\times 1}$; $\mathbf{C}=\mathbf{C}^1$; $\mathscr{U}_n$ 表示 $n\times n$ 阶酉矩阵的全体; $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$, A^H 表示 A 的共轭转置.

定义 1.1. 设 $A, B\in\mathbf{C}^{n\times n}$,称 $\{A, B\}$ 为 n 阶正则矩阵对(简称 n 阶正则对), 如果

$$\det(A+\lambda B)\not\equiv 0,\ \lambda\in\mathbf{C}. \tag{1.1}$$

记 n 阶正则对的全体为 $\mathscr{R}(n)$, 又记

$$\mathbf{G}_{1,2}=\{(\alpha,\beta)\neq(0,0):\alpha,\beta\in\mathbf{C}\}. \tag{1.2}$$

称 $(\alpha,\beta)\in\mathbf{G}_{1,2}$ 为 n 阶正则对 $\{A, B\}$ 的广义特征值,如果

$$\det(\beta A-\alpha B)=0. \tag{1.3}$$

* 1987 年 4 月 8 日收到.

$\{A, B\}$ 的所有广义特征值的全体，叫做 $\{A, B\}$ 的谱，记作 $\lambda(A, B)$，即

$$\lambda(A, B) = \{(\alpha, \beta) \in G_{1,2}: \det(\beta A - \alpha B) = 0\}. \tag{1.4}$$

定理 1.1 (Stewart[7]). 设 $\{A, B\} \in \mathscr{R}(n)$，则存在 $U, V \in \mathscr{U}_n$，使得

$$U^H A V = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \equiv T_A \equiv \Lambda_A + M_A,$$

$$U^H B V = \begin{pmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} \equiv T_B \equiv \Omega_B + M_B, \tag{1.5}$$

其中 $(\alpha_i, \beta_i) \in \lambda(A, B)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，$\Lambda_A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 和 $\Omega_B = \mathrm{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)$. 还可适当选取 $U, V \in \mathscr{U}_n$，使得 T_A 和 T_B 的对角元素，按任一指定的顺序排列.

推论 1.1. 设 $\{A, B\} \in \mathscr{R}(n)$，则存在非奇异阵 $P \in C^{n\times n}$ 和 $V \in \mathscr{U}_n$，使得

$$A = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} V^H, \quad B = P\begin{pmatrix} \beta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} V^H, \tag{1.6}$$

其中 (α_i, β_i) 满足 $|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1 (1 \leqslant i \leqslant n)$. 当 (1.6) 式中的上三角阵变为对角阵时，称 $\{A, B\}$ 为 n 阶正规矩阵对（简称 n 阶正规对）.

由于使用了弦度量

$$\rho((\alpha, \beta); (\gamma, \delta)) = \frac{|\alpha\delta - \beta\gamma|}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}\sqrt{|\gamma|^2 + |\delta|^2}}, \quad (\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in G_{1,2}, \tag{1.7}$$

故在 [2] 中导出 Henrici 型定理以及 [3] 中证明定理 1.4 时都基于分解式 (1.6)，从而使最后的结论中含有（或隐含有）P，得出的上界估计变得难以计算.

在由 (1.5) 推出 (1.6) 的过程中，采用在 (1.5) 式两边分别左乘如下矩阵：

$$\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2}}\right). \tag{1.8}$$

这是可行的，因为 $(\alpha_i, \beta_i) \neq (0, 0)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. 因此，$P$ 与 $\sqrt{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 有着密切的关系.

§2. 几 个 参 数

设 $\{A, B\} \in \mathscr{R}(n)$，用 $\mathscr{M}_{\{A,B\}}$ 表示使 $\{A, B\}$ 有分解式 (1.5) 的所有矩阵对 $\{U, V\}$ 的集合. 又

$$\rho(A, B) = \{(\alpha, \beta) \in G_{1,2}: \det(\beta A - \alpha B) \neq 0, \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} \tag{2.1}$$

表示 $\{A, B\}$ 的正则点集. 定义

$$\sigma(A, B) = \sup_{\{U,V\} \in \mathscr{M}_{\{A,B\}}} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \sqrt{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2}. \tag{2.2}$$

不难得知，若记 $Z = (A, B) \in C^{n\times 2n}$，则有

$$\sigma(A, B) \leqslant \|Z\|_2, \tag{2.3}$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示矩阵的谱范数.

为了估计 $\sigma(A, B)$ 的下界以及在§ 3 中建立 Henrici 型定理,我们还定义

$$\underline{\sigma}(A, B) = \inf_{(U,V)\in \mathscr{M}_{\{A,B\}}} \min_{1\leqslant i\leqslant n} \sqrt{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2}, \tag{2.4}$$

$$\omega(A, B) = \inf_{(\alpha,\beta)\in \rho(A,B)} \|(\beta A - \alpha B)^{-1}\|_2. \tag{2.5}$$

定理 2.1. 设 $\{A, B\} \in \mathscr{R}(n)$,则由上定义的数有如下关系:

$$\sigma(A, B) \geqslant \underline{\sigma}(A, B) \geqslant \omega^{-1}(A, B). \tag{2.6}$$

证明. (2.6) 的第一个不等号成立是显然的. 由 (1.5) 式及 $\|\cdot\|_2$ 的酉不变性知,对任意 $(\alpha, \beta) \in \rho(A, B)$,有

$$\|(\beta A - \alpha B)^{-1}\|_2 = \|(\beta T_A - \alpha T_B)^{-1}\|_2.$$

注意到 $(\beta\alpha_i - \beta_i\alpha)^{-1}(i = 1, \cdots, n)$ 是 $(\beta T_A - \alpha T_B)^{-1}$ 的特征值,因此

$$\|(\beta A - \alpha B)^{-1}\|_2 \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{|\beta\alpha_i - \alpha\beta_i|},$$

于是

$$\begin{aligned}\|(\beta A - \alpha B)^{-1}\|_2^{-1} &\leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} |\beta\alpha_i - \alpha\beta_i| \\ &\leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \cdot \sqrt{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2} \\ &= \min_{1\leqslant i\leqslant n} \sqrt{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2}.\end{aligned}$$

由 (α, β) 的任意性,得

$$\left(\inf_{(\alpha,\beta)\in \rho(A,B)} \|(\beta A - \alpha B)^{-1}\|_2\right)^{-1} \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} \sqrt{|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2}.$$

上式对任一形如 (1.5) 的分解式均成立,故 (2.6) 式成立. 证毕.

定理 2.2. $\{A, B\} \in \mathscr{R}(n)$,在分解式 (1.6) 中,存在非奇异矩阵 $P \in \mathbf{C}^{n\times n}$, 使得

$$|\det P| \geqslant \sigma^n(A, B) \geqslant \underline{\sigma}^n(A, B) \geqslant \omega^{-n}(A, B), \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}|\det P| &\geqslant \sigma_{\min}(z)\sigma^{n-1}(A, B) \geqslant \sigma_{\min}(z)\underline{\sigma}^{n-1}(A, B) \\ &\geqslant \sigma_{\min}(z)\omega^{-n+1}(A, B),\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 $Z = (A, B)$, $\sigma_{\min}(Z)$ 表示 Z 的最小奇异值.

证明. 由于 $\mathscr{M}_{\{A,B\}}$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中有界闭集, 故存在 $U, V \in \mathscr{U}_n$, 使得 (2.2) 中的上确界可以达到. 于是再结合 (1.8) 和 (2.6) 式,立即推出 (2.7). 为证明 (2.8) 式,在分解式 (1.5) 中,容易得到

$$|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 \geqslant \sigma_{\min}(ZZ^H),$$

即

$$\sqrt{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2} \geqslant \sigma_{\min}(Z).$$

由此再与 (1.8) 和 (2.6) 相结合,即可推出 (2.8). 证毕.

在 Bauer-Fike 型定理中[2,8], 均涉及相似变换矩阵的条件数. 下面给出上述定义的参数与变换矩阵的条件数之间的关系.

定义 2.1. 设 $\{A, B\}\in\mathscr{R}(n)$，称 $\{A, B\}$ 为可对角化的，如果存在非奇异矩阵 P，$Q\in C^{n\times n}$，使

$$\begin{aligned} A &= P\mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)Q \equiv P\Lambda Q, \\ B &= P\mathrm{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)Q \equiv P\Omega Q. \end{aligned} \tag{2.9}$$

定理 2.3. 设 $\{A, B\}\in\mathscr{R}(n)$ 是可对角化的且有分解 (2.9). 记 $Z=(A, B)$，$\kappa_2(Q)=\|Q\|_2\|Q^{-1}\|_2$ 和

$$S(A, B)=\sup_{(\alpha,\beta)\in\rho(A,B)}\min_{(\gamma,\delta)\in\lambda(A,B)}\rho((\alpha, \beta), (\gamma, \delta)), \tag{2.10}$$

则

$$\omega(A, B)\leqslant\kappa_2(Q)\|Z^+\|_2/S(A, B), \tag{2.11}$$

其中 Z^+ 是 Z 的 Moore-Penrose 广义逆，即

$$Z^+=Z^H(ZZ^H)^{-1}. \tag{2.12}$$

证明. 对任意 $(\alpha, \beta)\in\rho(A, B)$，有

$$\begin{aligned} \|(\beta A-\alpha B)^{-1}\|_2 &= \|Q^{-1}(\beta\Lambda-\alpha\Omega)^{-1}P^{-1}ZZ^+\|_2 \\ &= \left\|Q^{-1}(\beta\Lambda-\alpha\Omega)^{-1}(\Lambda, \Omega)\begin{pmatrix} Q & \\ & Q\end{pmatrix}Z^+\right\|_2 \\ &\leqslant \kappa_2(Q)\|Z^+\|_2\|(\beta\Lambda-\alpha\Omega)^{-1}(\Lambda, \Omega)\|_2. \end{aligned}$$

由于(见 [8] 引理 2.1)

$$\|(\beta\Lambda-\alpha\Omega)^{-1}(\Lambda, \Omega)\|_2=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\sqrt{|\alpha_i|^2+|\beta_i|^2}}{|\beta\alpha_i-\alpha\beta_i|} \tag{2.13}$$

及 (α, β) 的任意性，可知 (2.11) 成立. 证毕.

定理 2.4. 设 $\{A, B\}\in\mathscr{R}(n)$，且

$$A=PJ_AQ,\quad B=PJ_BQ, \tag{2.14}$$

其中 $\{J_A, J_B\}$ 为 $\{A, B\}$ 的 Weierstrass-Jordan 标准形 (见 [5] 或 [3], [8])，则

$$\omega(A, B)\leqslant\sqrt{2}\,\kappa_2(Q)\|Z^+\|_2\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{[S(A, B)]^i}, \tag{2.15}$$

其中相应的记号均同于定理 2.3，l 为 $\{J_A, J_B\}$ 中最大的 Weierstrass-Jordan 块对的阶数.

定理 2.4 的证明类似于定理 2.3，但此时类似于 (2.13) 式的是 [8] 中的引理 2.2.

注 2.1. 在定理 2.3 和 2.4 中，出现了参数 $S(A, B)$，它与 $\{A, B\}$ 的广义特征值在 Riemann 球面上的分布密切相关. 一般有

$$0<S(A, B)\leqslant 1 \text{ 和 } S(A, B)=1\Longleftrightarrow\lambda(A, B) \text{ 只含一元}. \tag{2.16}$$

准确计算 $\omega(A, B)$ 同计算 $\sigma(A, B)$ 一样，是十分困难的. 但由于广义特征值的个数是有限的(至多为 n 个)，因此，寻求某点 (α_0, β_0) 属于 $\rho(A, B)$ 比较容易. 这样，可以利用定理 2.5 对 $\omega(A, B)$ 作出估计. 此外，从定理 2.3 和 2.4 可以获得这样的启示，即 (α_0, β_0) 的选取若能使 (2.10) 的上确界达到，将是比较好的.

定理 2.5. 设 $\{A, B\}\in\mathscr{R}(n)$，$(\alpha_0, \beta_0)\neq(0, 0)$，$|\alpha_0|^2+|\beta_0|^2=1$ 且

$$\det(\beta_0A-\alpha_0B)\neq 0,$$

则

$$\omega(A, B) \leqslant \|(\beta_0 A - \alpha_0 B)^{-1}\|_2. \tag{2.17}$$

§3. $S_{\{A,B\}}\{C, D\}$ 的上界估计 (I)——Henrici 型定理

定义 3.1. 设 $\{A, B\} \in \mathscr{R}(n)$,称(见(1.5))

$$\Delta_\nu(A, B) = \inf_{(U,V)\in\mathscr{A}_{\{A,B\}}} \nu(M_A, M_B) \tag{3.1}$$

为 $\{A, B\}$ 关于矩阵范数 $\nu(\cdot)$ 的正规性偏离度.

由正规对的定义(见推论 1.1)知,当(1.5)中的 $M_A = M_B = 0$ 时,$\{A, B\}$ 一定是正规对;反之,若 $\{A, B\}$ 是正规对,则难以保证 $\{A, B\}$ 有一形如(1.5)的分解,使得 $M_A = M_B = 0$. 因此,定义 3.1 有其自身不足之处,但不影响扰动界的估计. 事实上,由下面的定理 3.2 和 3.3 可以看出,定义 3.1 要比 [2] 中关于正规性偏离度的定义在用于扰动界的研究上更为方便.

此外,还引进

$$\bar{\Delta}_\nu(A, B) = \sup_{(U,V)\in\mathscr{A}_{\{A,B\}}} \nu(M_A, M_B). \tag{3.2}$$

引理 3.1. 设 $R = D - M \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是非奇异矩阵,其中 $D = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_n)$,$M$ 为严格上三角阵. 如果

$$m = \|M\|_2 \neq 0, \quad \|R^{-1}\|_2^{-1} \leqslant \varepsilon, \tag{3.3}$$

则

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} |\delta_i| \leqslant m/g\left(\frac{m}{\varepsilon}\right), \tag{3.4}$$

其中 $g(\eta)$ 是 $g + g^2 + \cdots + g^n = \eta(\eta > 0)$ 的唯一非负解(见[3]).

定理 3.1 (Henrici 型). 设 $\{A, B\}, \{C, D\} \in \mathscr{R}(n)$,且 $Z(P_{Z^H} - P_{W^H}) \neq 0$,其中 $Z = (A, B)$, $W = (C, D)$, $P_{Z^H} = Z^+Z$ 和 $P_{W^H} = W^+W$,则对 $\|\cdot\|_2$ 的任一种强范数(即 $\nu(\cdot) \geqslant \|\cdot\|_2$),有

$$S_{\{A,B\}}\{C, D\} \leqslant \frac{1}{\tilde{\sigma}(A, B)} \frac{\eta}{g(\eta)} \nu(Z(P_{Z^H} - P_{W^H})),$$

$$\eta = \frac{\tilde{\Delta}_\nu(A, B)}{\nu(Z(P_{Z^H} - P_{W^H}))}, \tag{3.5}$$

其中 $g(\eta)$ 同引理 3.1,

$$\begin{cases}\tilde{\sigma}(A, B) = \sigma(A, B), \\ \tilde{\Delta}_\nu(A, B) = \bar{\Delta}_\nu(A, B),\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}\tilde{\sigma}(A, B) = \underline{\sigma}(A, B), \\ \tilde{\Delta}_\nu(A, B) = \Delta_\nu(A, B),\end{cases} \tag{3.6}$$

$$S_{\{A,B\}}\{C, D\} = \max_{(\gamma,\delta)\in\lambda(C,D)} \min_{(\alpha,\beta)\in\lambda(A,B)} \rho((\alpha, \beta), (\gamma, \delta)). \tag{3.7}$$

当 $\tilde{\Delta}_\nu(A, B) = 0$ 时,(3.5)式右端按 $\Delta_\nu(A, B) \to 0$ 时的极限值计算,即为

$$\nu(Z(P_{Z^H} - P_{W^H})).$$

证明. (3.6)式规定了 $\tilde{\sigma}(A, B)$ 和 $\tilde{\Delta}_\nu(A, B)$ 的两组不同的取值. 在此,只要证明它们取其中的一组值时(3.5)成立即可,因为另一组可类似加以证明. 下面证明,当

$\tilde{\sigma}(A, B)$，$\tilde{\Delta}_\nu(A, B)$ 取 (3.6) 中第二组时，(3.5) 成立.

由于 $\mathscr{M}_{(A,B)}$ 是有界闭集，故可设分解式 (1.5) 中的 U, V 是特殊选取的，使之满足 $\|(M_A, M_B)\|_2 = \Delta_2(A, B)$.

对任意 $(\gamma, \delta) \in \lambda(C, D)$，若 $(\gamma, \delta) \in \lambda(A, B)$，则勿需证明. 设 $(\gamma, \delta) \notin \lambda(A, B)$，且 $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$. 令

$$\begin{aligned} R &= \delta(\Lambda_A + M_A) - \gamma(\Omega_B + M_B) \\ &= (\delta\Lambda_A - \gamma\Omega_B) + (\delta M_A - \gamma M_B), \end{aligned}$$

故

$$\|R^{-1}\|_2^{-1} = \|(URV^H)^{-1}\|_2^{-1} = \|(\delta A - \gamma B)^{-1}\|_2^{-1} \leqslant \|\delta Ax - \gamma Bx\|_2,$$

其中 x 为 $\{C, D\}$ 属于 (γ, δ) 的广义特征向量，且 $\|x\|_2 = 1$. 注意到

$$\delta Ax - \gamma Bx = Z(P_{Z^H} - P_{W^H})\begin{pmatrix} \delta x \\ -\gamma x \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

于是

$$\|R^{-1}\|_2^{-1} \leqslant \|Z(P_{Z^H} - P_{W^H})\|_2. \tag{3.9}$$

又因为 R 的严格上三角部分满足

$$\|\delta M_A - \gamma M_B\|_2 \leqslant \|(M_A, M_B)\|_2 = \Delta_2(A, B), \tag{3.10}$$

故当 $\Delta_2(A, B) = 0$ 时，由 (3.9) 立即可以得知 (3.5) 成立. 不妨设 $\Delta_2(A, B) \neq 0$，则由引理 3.1, (3.9) 及 (3.10) 得

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} |\delta\alpha_i - \gamma\beta_i| \leqslant \frac{\Delta_2(A, B)}{g\left(\dfrac{\Delta_2(A, B)}{\|Z(P_{Z^H} - P_{W^H})\|_2}\right)}. \tag{3.11}$$

于是，由 (3.11) 和 (2.4) 得

$$S_{(A,B)}\{C, D\} \leqslant \frac{1}{\underline{\sigma}(A, B)} \frac{\Delta_2(A, B)}{g\left(\dfrac{\Delta_2(A, B)}{\|Z(P_{Z^H} - P_{W^H})\|_2}\right)}.$$

由 $g(\eta)$ 的单调性知，对任意 $\|\cdot\|_2$ 的强范数 $\nu(\cdot)$，有

$$\frac{\Delta_2(A, B)}{g\left(\dfrac{\Delta_2(A, B)}{\|Z(P_{Z^H} - P_{W^H})\|_2}\right)} \leqslant \frac{\eta_1}{g(\eta_1)} \nu(Z(P_{Z^H} - P_{W^H})),$$

$$\eta_1 = \frac{\Delta_2(A, B)}{\nu(Z(P_{Z^H} - P_{W^H}))}.$$

令 $\eta = \Delta_\nu(A, B)/\nu(Z(P_{Z^H} - P_{W^H}))$，则 $0 < \eta_1 \leqslant \eta$，故根据 $\eta/g(\eta) = 1 + \cdots + g^{n-1}(\eta)$ 的单调递增性及 $g(\eta)$ 的连续性，立即可得 (3.5) 式当 $\tilde{\sigma}(A, B)$ 和 $\tilde{\Delta}_\nu(A, B)$ 取 (3.6) 式中的第二组值时成立. 证毕.

注 3.1. 在 (3.5) 中出现了 $\underline{\sigma}(A, B)$ 和 $\bar{\Delta}_\nu(A, B)$，这两个数显然使定理 3.1 的结论相对减弱. 但这不是实质性问题. 事实上，在估计 $\sigma(A, B)$ 的下界和 $\Delta_\nu(A, B)$ 的上界时，往往是针对任意分解进行的，因此，它们同样适用于 $\underline{\sigma}(A, B)$ 和 $\bar{\Delta}_\nu(A, B)$，如定理 2.1.

推论 3.1. 符号同定理 3.1. 若 $Z(P_{Z^H} - P_{W^H}) = 0$，则 $\{A, B\}$ 和 $\{C, D\}$ 具有相

同的谱,即 $\lambda(A, B) = \lambda(C, D)$.

此外,由于(见[4]或[3])

$$\frac{\eta}{g(\eta)} \leqslant \begin{cases} n, & 若\ 0 \leqslant \eta \leqslant n, \\ n^{\frac{1}{n}} \eta^{1-\frac{1}{n}}, & 若\ \eta \geqslant n, \end{cases} \tag{3.12}$$

故从定理 3.1 又可得到如下推论.

推论 3.2. 条件同定理 3.1,则

$$S_{\{A,B\}}\{C, D\} \leqslant \frac{1}{\tilde{\sigma}(A, B)} \max\{n\nu(Z(P_{Z^H} - P_{W^H})), \\ n^{\frac{1}{n}} \tilde{\Delta}_\nu^{1-\frac{1}{n}}(A, B)[\nu(Z(P_{Z^H} - P_{W^H}))]^{\frac{1}{n}}\}. \tag{3.13}$$

下面将从定理 3.1 推出两个更为简洁的扰动界限的估计. 记

$$S(\Delta, r) = \begin{cases} \frac{\eta}{g(\eta)} r, \ \eta = \frac{\Delta}{r}, & 若\ r > 0, \\ 0, & 若\ r = 0. \end{cases}$$

引理 3.2 (Elsner[6]). $S(\Delta, r)$ 有如下性质:

(i) $S(\Delta, r)$ 关于 Δ 和 r 是严格单调递增的;

(ii) $r^{-\frac{1}{n}} S(\Delta, r)$ 关于 Δ 和 r 也是严格单调递增的.

引理 3.3 (Elsner[6]). 设 $\tau \geqslant 0$, $\delta > 0$,及

$$\xi = (\delta^{n-1} + \delta^{n-2}\tau + \cdots + \tau^{n-1})^{\frac{1}{n}}, \tag{3.14}$$

则 ξ 是使下式成立的最小数,

$$\min(S(\tau M, r), \delta M) \leqslant \xi M^{1-\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}}, \ M \geqslant 0, \ r \geqslant 0. \tag{3.15}$$

定理 3.2. 设 $\{A, B\}, \{C, D\} \in \mathscr{R}(n)$, $Z = (A, B)$, $W = (C, D)$,则

$$S_{\{A,B\}}\{C, D\} \leqslant \frac{\|Z\|_2}{\sigma(A, B)} C_1\left(n, \frac{\sigma(A, B)}{\|Z\|_2}\right) \|P_{Z^H} - P_{W^H}\|_2^{\frac{1}{n}}, \tag{3.16}$$

其中 $C_1(n, x)$ 由下式确定:

$$C_1(n, x) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i 2^{n-1-i}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{3.17}$$

因此,若利用(2.3)式还可得到

$$C_1\left(n, \frac{\sigma(A, B)}{\|Z\|_2}\right) \leqslant (2^n - 1)^{\frac{1}{n}}. \tag{3.18}$$

证明. 由定理 3.1 得

$$S_{\{A,B\}}\{C, D\} \leqslant \frac{1}{\sigma(A, B)} S(\bar{\Delta}_2(A, B), \|Z\|_2 r_2), \ r_2 = \|P_{Z^H} - P_{W^H}\|_2.$$

由于对任意分解式(1.5),有

$$\|(M_A, M_B)\|_2 \leqslant \|U^H(A, B)\begin{pmatrix} V & \\ & V \end{pmatrix} - (\Lambda_A, \Omega_B)\|_2 \\ \leqslant \|Z\|_2 + \|(\Lambda_A, \Omega_B)\|_2 \leqslant 2\|Z\|_2,$$

故由引理 3.2 得

$$S_{(A,B)}\{C, D\} \leqslant \frac{1}{\sigma(A, B)} S(2\|Z\|_2, \|Z\|_2 r_2).$$

结合上式与 $S_{(A,B)}\{C, D\} \leqslant 1$ 以及引理 3.3,得

$$S_{(A,B)}\{C, D\} \leqslant \frac{1}{\sigma(A, B)} \min\{S(2\|Z\|_2, \|Z\|_2 r_2), \sigma(A, B)\}$$

$$= \frac{\|Z\|_2}{\sigma(A, B)} \min\left\{S(2, r_2), \frac{\sigma(A, B)}{\|Z\|_2}\right\}$$

$$\leqslant \frac{\|Z\|_2}{\sigma(A, B)} C_1\left(n, \frac{\sigma(A, B)}{\|Z\|_2}\right) \|P_{Z^H} - P_{W^H}\|_2^{\frac{1}{n}}.$$

证毕.

定理 3.3. 条件及符号同定理 3.2,则

$$S_{(A,B)}\{C, D\} \leqslant \frac{\|Z\|_F}{\sigma(A, B)} C_2\left(n, \frac{\sigma(A, B)}{\|Z\|_F}\right) \|P_{Z^H} - P_{W^H}\|_F^{\frac{1}{n}}, \tag{3.19}$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数，$C_2(n, x)$ 由下式确定:

$$C_2(n, x) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{3.20}$$

再利用 (2.3) 式，$\sigma(A, B) \leqslant \|Z\|_2 \leqslant \|Z\|_F$,可得

$$C_2\left(n, \frac{\sigma(A, B)}{\|Z\|_F}\right) \leqslant n^{\frac{1}{n}}. \tag{3.21}$$

证明．由定理 3.1 及 $\|\cdot\|_F \geqslant \|\cdot\|_2$,得

$$S_{(A,B)}\{C, D\} \leqslant \frac{1}{\sigma(A, B)} S(\bar{\Delta}_F(A, B), \|Z\|_F r_F), \quad r_F = \|P_{Z^H} - P_{W^H}\|_F.$$

注意,对任意形如 (1.5) 的分解有

$$\|(M_A, M_B)\|_F^2 = \|Z\|_F^2 - \|(\Lambda_A, \Omega_B)\|_F^2 < \|Z\|_F^2,$$

故 $\bar{\Delta}_F(A, B) < \|Z\|_F$. 再结合 $S_{(A,B)}\{C, D\} \leqslant 1$ 及引理 3.2,引理 3.3 得

$$S_{(A,B)}\{C, D\} \leqslant \frac{1}{\sigma(A, B)} \min(S(\|Z\|_F, \|Z\|_F r_F), \sigma(A, B))$$

$$\leqslant \frac{\|Z\|_F}{\sigma(A, B)} \min\left(S(1, r_F), \frac{\sigma(A, B)}{\|Z\|_F}\right)$$

$$\leqslant \frac{\|Z\|_F}{\sigma(A, B)} C_2\left(n, \frac{\sigma(A, B)}{\|Z\|_F}\right) \|P_{Z^H} - P_{W^H}\|_F^{\frac{1}{n}}.$$

证毕.

举一例说明如何用定理 3.2 和 3.3 估计扰动界.

例 3.1. $n = 2$, 记 $i = \sqrt{-1}$, $Z = (A, B)$, $W = (C, D)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix}.$$

不难算出

$$\lambda(A, B)=\{(1,1),(1,1)\},\ \lambda(C, D)=\left\{\left(1,\ 1-\frac{1}{2}\times 10^{-4}\right.\right.$$

$$\left.\left.\pm i\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}\sqrt{4-10^{-4}}\right)\right\},$$

$$S_{(A,B)}\{C, D\}=0.005,$$

$$\|Z\|_2=\sqrt{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}},\ \sigma_{\min}(Z)=\sqrt{1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}},\ \sigma(A, B)\geqslant\sqrt{2},$$

$$\omega(A, B)\leqslant\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}A+\frac{1}{\sqrt{2}}B\right)^{-1}\right\|_2=\frac{1}{4}\sqrt{9+\sqrt{17}},\ \|Z\|_F=\sqrt{5}.$$

对 $\|P_{Z^H}-P_{W^H}\|_d(d=2$ 或 $F)$ 的估计,是利用(见[3],第四章定理 4.6)

$$\|P_{Z^H}-P_{W^H}\|_d\leqslant\|Z-W\|_d/\sigma_{\min}(Z). \tag{3.22}$$

在 (3.16) 和 (3.19) 中 $C_1(\cdot)$ 和 $C_2(\cdot)$ 分别用 (3.18) 和 (3.21) 代替,计算结果为

$S_{(A,B)}\{C, D\}\leqslant 0.021486$ (定理 3.2),

$S_{(A,B)}\{C, D\}\leqslant 0.020623$ (定理 3.3).

若还将 $\sigma(A, B)\geqslant\omega^{-1}(A, B)$ 代之,结果为

$S_{(A,B)}\{C, D\}\leqslant 0.033552$ (定理 3.2),

$S_{(A,B)}\{C, D\}\leqslant 0.032205$ (定理 3.3).

衷心感谢孙继广老师的指导.

参 考 文 献

[1] Sun, Ji-quang (孙继广), Perturbation analysis for the generalized eigenvalue and the generalized singular valuc problem, in ≪Matrix Pencils≫ (Lecture notes in Math. 973), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983, 221—244.

[2] L. Elsner, Sun Ji-guang, Perturbation theorems for the generalized eigenvalue problem, *Lin. Alg. Appl.*, 48(1982), 341—357.

[3] 孙继广,矩阵扰动分析,科学出版社,北京,1987.

[4] P. Henrici. Bounds for iterates, inverse, spectral variation and fields of volues of nonnormal matrices, *Numer. Math.*, 4(1962), 24—39.

[5] Ф. Р. Гантмахер, Теория Матриц. Избателъство «Наука» ФМЛ, Москва, 1966.

[6] L. Elsner, On the variation of the spectra of matrices, *Lin. Alg. Appl.*, 48(1982), 341—357.

[7] G. W. Stewart, On the sensitivity of the eigenvalue problem $Ax=\lambda Bx$, *SIAM J. Numer. Anal.*, 9(1972), 669—686.

[8] 李仁仓,正则矩阵对的广义特征值扰动定理,待发表.