

广义特征值的扰动界限(II)*¹⁾

李仁仓

(中国科学院计算中心)

PERTURBATION BOUNDS FOR GENERALIZED EIGENVALUES (II)

Li Ren-cang

(Computing Center, Academia Sinica)

Abstract

As a continuation of [4], we still study the perturbation bounds for generalized eigenvalues of general regular matrix pairs, but with a different method. Through estimating the perturbation bounds of the coefficients of the generalized eigenpolynomials, we obtain two perturbation theorems for the generalized eigenvalue problem.

§ 4. $S_{\{A, B\}}\{C, D\}$ 的上界估计

本节将利用广义特征多项式的概念来研究广义特征值扰动界的上界估计。

设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 首先定义一列算子:

$$T_k(A, B), k = 0, 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

其中每个 $T_k(A, B)$ 都是 $\binom{n}{k}$ 个行列式的和, 其构成如下: 在 B 的行列式中选取某 k 列, 分别用 A 的相应的 k 列取而代之, 即可得到 $\binom{n}{k}$ 个行列式. 将其相加, 即得 $T_k(A, B)$.

性质 4.1.

$$T_0(A, B) = \det B, T_n(A, B) = \det A. \quad (4.2)$$

定义 4.1. 设 $(\alpha, \beta) \in G_{1,2}$, 称

$$f(\alpha, \beta) = \det(\beta A - \alpha B) \quad (4.3)$$

为 n 阶矩阵对 $\{A, B\}$ 的广义特征多项式。

* 1987年4月8日收到。

1) 本文的符号与[4]一致。

定理 4.1.

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{n-k} (-1)^k T_{n-k}(A, B). \quad (4.4)$$

性质 4.2 (对称性).

$$T_k(A, B) = T_{n-k}(B, A). \quad (4.5)$$

性质 4.3.

$$T_k(A, B) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \det(tA + B)|_{t=0}. \quad (4.6)$$

引进如下记号

$$\begin{aligned} Q_{k,n} &= \{\alpha: \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq n\}; \\ \alpha_l &= (1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

对 $\alpha \in Q_{k,n}$, 用 α_l/α 表示 α 的补, 即 $\alpha_l/\alpha \in Q_{n-k,n}$, 其元素是由 α_l 中不属于 α 的元素组成. 对 $A \in C^{n \times n}$, $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$, 用 $A[\alpha|\beta]$ 或 $A[(\alpha_1, \dots, \alpha_k)|(\beta_1, \dots, \beta_k)]$ 表示由 A 的第 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 行和 β_1, \dots, β_k 列交叉处的元素构成的子矩阵, 即 $A[\alpha|\beta] = (a_{\alpha_i \beta_j})_{k \times k}$, 其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

注 4.1. 若用 Λ^k 表示算子

$$\Lambda^k: A \mapsto \Lambda^k A, A \in C^{n \times n}, \quad (4.7)$$

其中 $\Lambda^k A$ 表示 A 的 k 次复合矩阵, 即

$$\Lambda^k A = (\det A[\alpha|\beta])_{\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}}, \alpha, \beta \in Q_{k,n} \text{ 按字典排列.}$$

则当 $B = I$ 时,

$$T_k(A, B) = \text{tr} \Lambda^k A,$$

其中 tr 表示矩阵的迹. 因此, 我们可以形式地采用如下记号:

$$T_k(A, B) \equiv \text{tr}_B \Lambda^k A \equiv \text{tr}_A \Lambda^{n-k} B. \quad (4.8)$$

特别当 A (或 B) 为对角阵时, (4.8) 式非常合理, 此时可视 tr_A (或 tr_B) 为矩阵的一种加权迹 (见性质 4.4).

性质 4.4. 设 $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 则

$$\text{tr}_A \Lambda^{n-k} B = \sum_{\alpha \in Q_{k,n}} \prod_{i=1}^k \lambda_{\alpha_i} \det B[\alpha_l/\alpha | \alpha_l/\alpha]. \quad (4.9)$$

因此, tr_A 是从 $\binom{n}{n-k}$ 维线性空间到 C 上的线性算子, 如下定义: 对

$$C \in C^{\binom{n-k}{n-k} \times \binom{n-k}{n-k}}$$

且

$$C = (C_{\alpha\beta}), \alpha, \beta \in Q_{n-k,n} \text{ 按字典排列,}$$

则

$$\text{tr}_A C = \sum_{\alpha \in Q_{k,n}} \prod_{i=1}^k \lambda_{\alpha_i} C_{\alpha_l/\alpha, \alpha_l/\alpha}. \quad (4.10)$$

同时, 有

$$\|(\text{tr}_A)_{(n-k)}\|_2 = \sup_{\substack{\|C\|_2=1 \\ C \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}}} |\text{tr}_A C| = \sum_{\alpha \in Q_{k,n}} \prod_{i=1}^k |\lambda_{\alpha_i}|. \quad (4.11)$$

证明. 由行列式的性质知, (4.9) 是显然的. 现在证明 (4.11). 由于 $\|C\|_2 = 1$ 时

$$|C_{\alpha_j/\alpha_j/\alpha}| \leq 1, \quad \alpha \in Q_{k,n},$$

故由 (4.10) 得

$$\|(\text{tr}_A)_{(n-k)}\|_2 \leq \sum_{\alpha \in Q_{k,n}} \prod_{i=1}^k |\lambda_{\alpha_i}|.$$

但当 $C = \text{diag} \left\{ \text{sign} \left(\prod_{i=1}^k \lambda_{n-k+i} \right), \dots, \text{sign} \left(\prod_{i=1}^k \lambda_i \right) \right\}$ 时

$$|\text{tr}_A C| = \sum_{\alpha \in Q_{k,n}} \prod_{i=1}^k |\lambda_{\alpha_i}|,$$

其中 $\text{sign}(\cdot)$ 是符号函数. 故 (4.11) 成立. 证毕.

4.1. 用 $\|\cdot\|_2$ 估计.

今后将用到一些关于算子在某点的方向导数的概念, 现介绍如下.

设 $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

$$(\mathcal{D} \Lambda^k A)(C) = \frac{d}{dt} \Lambda^k(A + tC)|_{t=0}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (4.12)$$

$$(\mathcal{D}_A T_k(A, B))(C) = \frac{d}{dt} T_k(A + tC, B)|_{t=0}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.13)$$

$$(\mathcal{D}_B T_k(A, B))(C) = \frac{d}{dt} T_k(A, B + tC)|_{t=0}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (4.14)$$

分别表示算子 Λ^k 和 T_k 在点 A 和 (A, B) 沿方向 C 的导数和偏导数. 此外, 还要用到算子的从属范数:

$$\|\mathcal{D} \Lambda^k A\|_2 = \sup_{\substack{C \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ \|C\|_2=1}} \|(\mathcal{D} \Lambda^k A)(C)\|_2, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (4.15)$$

$$\|\mathcal{D}_A T_k(A, B)\|_2 = \sup_{\substack{C \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ \|C\|_2=1}} |(\mathcal{D}_A T_k(A, B))(C)|, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.16)$$

$$\|\mathcal{D}_B T_k(A, B)\|_2 = \sup_{\substack{C \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ \|C\|_2=1}} |(\mathcal{D}_B T_k(A, B))(C)|, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (4.17)$$

引理 4.1 (奇异值分解). 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则存在 $U, V \in \mathcal{U}_n$, 使得

$$A = U \Sigma V \equiv U \text{diag}(v_1, \dots, v_n) V, \quad (4.18)$$

其中 $v_i = v_i(A) \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$) 为 A 的奇异值.

引理 4.2 (Bhatia-Frieland^[11]). 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 其奇异值为 $v_1 \geq \dots \geq v_n \geq 0$, 则对 $1 \leq k \leq n$, 有

$$\|\mathcal{D} \Lambda^k A\|_2 = \sum_{p=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^k v_j. \quad (4.19)$$

由此可得

$$\|\mathcal{D}\Lambda^k A\|_2 \leq k \|A\|_2^{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4.20)$$

引理 4.3. 设 $A, B \in \mathbf{C}^{n \times n}$, 则

$$\|\mathcal{D}_A T_k(A, B)\|_2 \leq k \|A\|_2^{k-1} \binom{n}{n-k} \|B\|_2^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.21)$$

$$\|\mathcal{D}_B T_k(A, B)\|_2 \leq (n-k) \|B\|_2^{n-k-1} \binom{n}{k} \|A\|_2^k, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (4.22)$$

证明. 由引理 4.1 知, A 存在奇异值分解

$$A = U\Sigma V, \quad U, V \in \mathcal{U}_n,$$

于是, 由性质 4.3 得

$$\begin{aligned} T_k(A, B) &= \frac{1}{k!} \det U \cdot \det V \cdot \frac{d^k}{dt^k} \det(t\Sigma + U^H B V^H) \Big|_{t=0} \\ &= \det U \cdot \det V \cdot \operatorname{tr}_\Sigma \Lambda^{n-k}(U^H B V^H), \end{aligned}$$

从而由算子微分的链式法则, 知

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_B T_k(A, B) &= \det U \det V \cdot \mathcal{D}_B \operatorname{tr}_\Sigma \Lambda^{n-k}(U^H B V^H) \\ &= \det U \cdot \det V \mathcal{D}_{\operatorname{tr}_\Sigma} \mathcal{D}_{U^H B V^H} \Lambda^{n-k}(U^H B V^H) \mathcal{D}_B(U^H B V^H). \end{aligned}$$

于是由性质 4.4、引理 4.2 及 $\|\mathcal{D}_B(U^H B V^H)\|_2 = 1$ (算子的从属范数), 得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_B T_k(A, B)\|_2 &\leq \|(\operatorname{tr}_\Sigma)_{(n-k)}\|_2 \|\mathcal{D}_{U^H B V^H} \Lambda^{n-k}(U^H B V^H)\|_2 \|\mathcal{D}_B(U^H B V^H)\|_2 \\ &\leq \binom{n}{k} \|A\|_2^k (n-k) \|U^H B V^H\|_2^{n-k-1} \\ &= (n-k) \|B\|_2^{n-k-1} \binom{n}{k} \|A\|_2^k. \end{aligned}$$

(4.22) 获证. 另一方面, 由性质 4.2 和 (4.22) 可立即推出 (4.21). 证毕.

引理 4.4. 设 $A_i, B_i \in \mathbf{C}^{n \times n} (i = 1, 2)$, 记

$$M_1 = \max\{\|A_i\|_2, i = 1, 2\}, \quad M_2 = \max\{\|B_i\|_2, i = 1, 2\}, \quad (4.23)$$

则当 $0 \leq k \leq n$ 时

$$\begin{aligned} |T_k(A_1, B_1) - T_k(A_2, B_2)| &\leq k M_1^{k-1} \binom{n}{n-k} \|B_1\|_2^{n-k} \|A_2 - A_1\|_2 \\ &\quad + (n-k) M_2^{n-k-1} \binom{n}{k} \|A_2\|_2^k \|B_2 - B_1\|_2, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} |T_k(A_1, B_1) - T_k(A_2, B_2)| &\leq (n-k) M_2^{n-k-1} \binom{n}{k} \|A_1\|_2^k \|B_2 - B_1\|_2 \\ &\quad + k M_1^{k-1} \binom{n}{n-k} \|B_2\|_2^{n-k} \|A_2 - A_1\|_2. \end{aligned} \quad (4.24')$$

证明. 首先注意到

$$\begin{aligned} |T_k(A_1, B_1) - T_k(A_2, B_2)| \\ \leq |T_k(A_1, B_1) - T_k(A_2, B_1)| + |T_k(A_2, B_1) - T_k(A_2, B_2)|. \end{aligned} \quad (4.25)$$

令 $f(t) = (1-t)A_1 + tA_2 (0 \leq t \leq 1)$, 应用中值定理(见 [3] 8.5.4 节)得

$$|T_k(A_1, B_1) - T_k(A_2, B_1)| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\mathcal{D}_{f(t)} T_k(f(t), B)\|_2 \|\mathcal{D}f(t)\|_2$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{0 \leq k \leq n} k \|f(\lambda)\|_2^{k-1} \binom{n}{n-k} \|B_1\|_2^{n-k} \|A_2 - A_1\|_2 \quad (\text{引理 4.3}) \\ &\leq k M_1^{k-1} \binom{n}{n-k} \|B_1\|_2^{n-k} \|A_2 - A_1\|_2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

另一方面, 由性质 4.2 及 (4.26) 得

$$\begin{aligned} |T_k(A_2, B_1) - T_k(A_2, B_2)| &= |T_{n-k}(B_1, A_2) - T_{n-k}(B_2, A_2)| \\ &\leq (n-k) M_2^{n-k-1} \binom{n}{k} \|A_2\|_2^k \|B_2 - B_1\|_2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

再由 (4.25)–(4.27) 立得 (4.24). 同理, 可由

$$\begin{aligned} |T_k(A_1, B_1) - T_k(A_2, B_2)| &\leq |T_k(A_1, B_1) - T_k(A_1, B_2)| \\ &\quad + |T_k(A_1, B_2) - T_k(A_2, B_2)| \end{aligned}$$

导出 (4.24)'. 证毕.

定理 4.2. 设 $\{A, B\}, \{C, D\} \in \mathcal{R}(n)$, 记

$$M_1 = \max\{\|A\|_2, \|C\|_2\}, M_2 = \max\{\|B\|_2, \|D\|_2\}, \quad (4.28)$$

则

$$\begin{aligned} S_{\{A, B\}}\{C, D\} &\leq \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\sigma(A, B)} [(M_1 + \|B\|_2)^{n-1} \|C - A\|_2 \\ &\quad + (M_2 + \|C\|_2)^{n-1} \|D - B\|_2]^{\frac{1}{n}}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} S_{\{A, B\}}\{C, D\} &\leq \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\sigma(A, B)} [(M_1 + \|D\|_2)^{n-1} \|C - A\|_2 \\ &\quad + (M_2 + \|A\|_2)^{n-1} \|D - B\|_2]^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \quad (4.29)'$$

特别有

$$\begin{aligned} S_{\{A, B\}}\{C, D\} &\leq \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\sigma(A, B)} [2\max(M_1, M_2)]^{n-1} (\|C - A\|_2 \\ &\quad + \|D - B\|_2)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

证明. 设 $f(\alpha, \beta), g(\alpha, \beta)$ 分别是 $\{A, B\}$ 和 $\{C, D\}$ 的广义特征多项式, 则当 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 时, 由 (4.4), (4.24) 以及

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= n \binom{n-1}{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n, \\ (n-k) \binom{n}{n-k} &= n \binom{n-1}{n-k-1} = n \binom{n-1}{k}, \quad 0 \leq k \leq n-1 \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} |f(\alpha, \beta) - g(\alpha, \beta)| &\leq \sum_{k=0}^n |T_k(A, B) - T_k(C, D)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) M_2^{n-k-1} \binom{n}{n-k} \|C\|_2^k \|D - B\|_2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^n k M_1^{k-1} \binom{n}{k} \|B\|_2^{n-k} \|C - A\|_2 \quad (\text{引理 4.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} M_2^{n-k-1} \|C\|_2^k \|D - B\|_2 + n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} M_1^{k-1} \|B\|_2^{n-k} \|C - A\|_2 \\
 & - n[(M_2 + \|C\|_2)^{n-1} \|D - B\|_2 + (M_1 + \|B\|_2)^{n-1} \|C - A\|_2]. \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

对 $\{A, B\}$ 进行形如 (1.6) 的分解, 使得 P 满足 (2.7) 式, 则对任意 $(\gamma, \delta) \in \mathcal{L}(C, D)$ 由 $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$, 由 (1.6) 及 $g(\gamma, \delta) = 0$ 得

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^n |\delta \alpha_i - \gamma \beta_i| &= \frac{1}{|\det P|} |f(\gamma, \delta)| = \frac{1}{|\det P|} |f(\gamma, \delta) - g(\gamma, \delta)| \\
 &\leq \frac{n}{\sigma^n(A, B)} [(M_2 + \|C\|_2)^{n-1} \|D - B\|_2 + (M_1 + \|B\|_2)^{n-1} \|C - A\|_2].
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^n \rho((\alpha_i, \beta_i), (\gamma, \delta)) &\leq \frac{n}{\sigma^n(A, B)} [(M_2 + \|C\|_2)^{n-1} \|D - B\|_2 \\
 &+ (M_1 + \|B\|_2)^{n-1} \|C - A\|_2].
 \end{aligned}$$

因此, 至少有一对 (α_i, β_i) , 适合

$$\begin{aligned}
 \rho((\alpha_i, \beta_i), (\gamma, \delta)) &\leq \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sigma(A, B)} [(M_2 + \|C\|_2)^{n-1} \|D - B\|_2 \\
 &+ (M_1 + \|B\|_2)^{n-1} \|C - A\|_2]^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

故 (4.29) 成立. 与此类似, 采用 (4.24)' 可导出 (4.29)'. (4.30) 是 (4.29) (或 (4.29)') 的直接推论. 证毕.

注 4.2. 在上述证明中, 选取分解 (1.6) 并使 P 满足 (2.7). 若使 P 满足 (2.8), 即可得到与定理 4.2 稍有不同的上界估计, 此时的结论应是 (4.29) (或 (4.29)'), (4.30) 中的 $\sigma(A, B)$ 换为

$$\sigma_{\min}^{\frac{1}{2}}(Z) \sigma^{1-\frac{1}{2}}(A, B). \quad (4.32)$$

4.2. 用 $\|\cdot\|_F$ 估计.

仍然采用估计算子导数的从属范数的方法来进行, 即估计

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{D}_A T_k(A, B)\|_F &= \sup_{\substack{C \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ \|C\|_F=1}} |(\mathcal{D}_A T_k(A, B))(C)|, \\
 \|\mathcal{D}_B T_k(A, B)\|_F &= \sup_{\substack{C \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ \|C\|_F=1}} |(\mathcal{D}_B T_k(A, B))(C)|, \quad 0 \leq k \leq n \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

的上界.

引理 4.5 (Bhatia-Mukherjea^[2]). 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

$$\det_n: \mathbb{C}^{n \times n} \mapsto \mathbb{C} \quad (4.34)$$

表示行列式映射, 则

$$\|\mathcal{D} \det_n(A)\|_F \leq n^{1-\frac{n}{2}} \|A\|_F^{n-1}, \quad (4.35)$$

其中

$$(\mathcal{D} \det_n(A))(C) = \frac{d}{dt} \det_n(A + tC)|_{t=0}, \quad C \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad (4.36)$$

$$\|\mathcal{D} \det_n(A)\|_F = \sup_{\substack{C \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ \|C\|_F=1}} |(\mathcal{D} \det_n(A))(C)|. \quad (4.37)$$

引理 4.6. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则

$$\|\mathcal{D}_A T_k(A, B)\|_F \leq n^{\frac{n-k}{2}} \binom{n}{n-k} \|B\|_F^{n-k} k^{1-\frac{k}{2}} \|A\|_F^{k-1}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.38)$$

$$\|\mathcal{D}_B T_k(A, B)\|_F \leq n^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \|A\|_F^{n-k} (n-k)^{1-\frac{n-k}{2}} \|B\|_F^{n-k-1}, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (4.39)$$

证明. 与定理 4.2 的证明类似, 有

$$T_k(A, B) = \det U \cdot \det V \cdot \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}_{k,n}} \prod_{i=1}^k \nu_{\alpha_i} \det_{n-k}(U^H B V^H)[\alpha_i/\alpha | \alpha_i/\alpha]. \quad (4.40)$$

记

$$\varphi_\alpha(U^H B V^H) = (U^H B V^H)[\alpha_i/\alpha | \alpha_i/\alpha],$$

显然 $\varphi_\alpha(\cdot): \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ 是线性算子, 并且

$$\|\mathcal{D}_{U^H B V^H} \varphi_\alpha(U^H B V^H)\|_F = \sup_{\substack{C \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ \|C\|_F=1}} \left\| \frac{d}{dt} \varphi_\alpha(U^H B V^H + tC)|_{t=0} \right\|_F \leq 1. \quad (4.41)$$

又根据微分的链式法则, 得

$$\mathcal{D}_B \det_{n-k} \varphi_\alpha(U^H B V^H) = \mathcal{D} \det_{n-k} \mathcal{D} \varphi_\alpha(U^H B V^H) \mathcal{D}_B(U^H B V^H).$$

故由 (4.40), (4.41), 上式及引理 4.5 得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_B T_k(A, B)\|_F &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}_{k,n}} \prod_{i=1}^k \nu_{\alpha_i} \|\mathcal{D}_B \det_{n-k} \varphi_\alpha(U^H B V^H)\|_F \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}_{k,n}} \prod_{i=1}^k \nu_{\alpha_i} (n-k)^{1-\frac{n-k}{2}} \|\varphi_\alpha(U^H B V^H)\|_F^{n-k-1} \\ &\leq \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{Q}_{k,n}} \prod_{i=1}^k \nu_{\alpha_i} \right) (n-k)^{1-\frac{n-k}{2}} \|B\|_F^{n-k-1}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

利用待定 Lagrange 乘子法, 可以看出, 对 n 个非负数 y_1, \dots, y_n , 在约束条件

$$\sum_{i=1}^n y_i = M > 0$$

下, 函数

$$f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}_{k,n}} \prod_{i=1}^k y_{\alpha_i}$$

的最大值是

$$f_{\max} = \binom{n}{k} \left(\sqrt{\frac{M}{n}} \right)^k.$$

故由 (4.42) 得

$$\|\mathcal{D}_B T_k(A, B)\|_F \leq (n-k)^{1-\frac{n-k}{2}} \|B\|_F^{n-k-1} \binom{n}{k} n^{-\frac{k}{2}} \|A\|_F^k.$$

此即 (4.39) 式, 而 (4.38) 可由 (4.39) 和性质 4.2 推出. 证毕.

引理 4.7. 设 $A_i, B_i \in C^{n \times n} (i = 1, 2)$, 记

$$M_1 = \max\{\|A_i\|_F, i = 1, 2\}, M_2 = \max\{\|B_i\|_F, i = 1, 2\}, \quad (4.43)$$

则当 $0 \leq k \leq n$ 时

$$\begin{aligned} |T_k(A_1, B_1) - T_k(A_2, B_2)| &\leq k^{1-\frac{k}{2}} M_1^{k-1} n^{-\frac{n-k}{2}} \binom{n}{n-k} \|B_1\|_F^{n-k} \|A_2 - A_1\|_F \\ &+ (n-k)^{1-\frac{n-k}{2}} M_2^{n-k-1} n^{-\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \|A_2\|_F^k \|B_2 - B_1\|_F, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} |T_k(A_1, B_1) - T_k(A_2, B_2)| \\ \leq k^{1-\frac{k}{2}} M_1^{k-1} n^{-\frac{n-k}{2}} \binom{n}{n-k} \|B_2\|_F^{n-k} \|A_1 - A_2\|_F \\ + (n-k)^{1-\frac{n-k}{2}} M_2^{n-k-1} n^{-\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \|A_1\|_F^k \|B_2 - B_1\|_F. \end{aligned} \quad (4.44)'$$

引理 4.7 的证明类似于引理 4.4.

定理 4.3. 设 $\{A, B\}, \{C, D\} \in \mathcal{R}(n)$, 令

$$M_1 = \max\{\|A\|_F, \|C\|_F\}, M_2 = \max\{\|B\|_F, \|D\|_F\}, \quad (4.45)$$

则

$$\begin{aligned} S_{(A,B)}\{C, D\} &\leq \frac{1}{\sigma(A, B)} \left[\left(\sum_{k=1}^n k^{1-\frac{k}{2}} M_1^{k-1} n^{-\frac{n-k}{2}} \binom{n}{n-k} \|B\|_F^{n-k} \right) \|C - A\|_F \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^{1-\frac{n-k}{2}} M_2^{n-k-1} n^{-\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \|C\|_F^k \right) \|D - B\|_F \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} S_{(A,B)}\{C, D\} &\leq \frac{1}{\sigma(A, B)} \left[\left(\sum_{k=1}^n k^{1-\frac{k}{2}} M_1^{k-1} n^{-\frac{n-k}{2}} \binom{n}{n-k} \|D\|_F^{n-k} \right) \|C - A\|_F \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^{1-\frac{n-k}{2}} M_2^{n-k-1} n^{-\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \|A\|_F^k \right) \|D - B\|_F \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.46)'$$

特别有

$$S_{(A,B)}\{C, D\} \leq \frac{C(n)}{\sigma(A, B)} (\max(M_1, M_2))^{1-\frac{1}{2}} (\|C - A\|_F + \|D - B\|_F)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.47)$$

其中

$$C(n) = \left(\sum_{k=1}^n k^{1-\frac{k}{2}} n^{-\frac{n-k}{2}} \binom{n}{n-k} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.48)$$

注 4.3. 与注 4.2 同样道理, (4.46), (4.46)' 和 (4.47) 中的 $\sigma(A, B)$ 可以换为

$$\sigma_{\min}^{\frac{1}{2}}(Z) \sigma^{1-\frac{1}{2}}(A, B).$$

例 4.1. 设 $n = 2$, 仍用 §3 中例 3.1 的矩阵对 $\{A, B\}$ 和 $\{C, D\}$. 计算结果如下表 4.1 所示, 其中第 2 行和第 3 行的数, 是用

$$\sigma(A, B) \geq \sqrt{2} \quad \text{和} \quad \sigma(A, B) \geq \omega^{-1}(A, B) \geq \frac{4}{\sqrt{9 + \sqrt{17}}}$$

分别代入各式算出的 $S_{(A,B)}\{C, D\}$ 的上界。

表 4.1

(4.29)	(4.29)	(4.30)	(4.46)	(4.46)	(4.47)
0.01618	0.01618	0.017989	0.013899	0.013899	0.014459
0.025267	0.025267	0.028091	0.021704	0.021704	0.022579

衷心感谢孙继广老师的指导。

参 考 文 献

- [1] R. Bhatia, S. Friedland, Variation of Grassmann powers and spectra, *Lin. Alg. Appl.*, 40(1981), 1—18.
- [2] R. Bhatia, K. Mukherjea, On the rate of change of spectra of operators, *Ibid*, 27(1979), 147—157.
- [3] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.
- [4] 李仁仓, 广义特征值的扰动界限 (I), *计算数学*, 11: 2(1989).