一种稳定性问题中临界点的计算*

李 仁 仓
(中国科学院计算中心)

COMPUTING THE CRITICAL POINTS OF A STABILITY PROBLEM

Li Ren-cang
(Computing Center, Academia Sinica)

Abstract

This is a continuation of the author's previous paper [3]. Here, the following problem is studied: Given an n by n matrix $A(\lambda, \theta)$ whose elements are differentiable functions of the parameters λ and θ, find λ_* and ϑ_* such that

$$\det A(\lambda_*, \vartheta_*) = 0 \text{ and } \mathrm{Re}\,\lambda_* = 0,$$

where Re λ denotes the real part of λ. The importance of this problem may be found in Lancaster [1] ch. 6. Based on some differentiability results about QR decomposition in [3], we give an effective algorithm to solve this problem.

It is worth mentioning that in practical computing three Lancaster algorithms (see [1], 93—95) may lead to some wrong conclusions, as shown in this paper. The numerical results in [1], 95—98 are extremely misleading, for in [1] the "converging" solutions accepted are far from true ones.

Numerical tests are presented.

符号. $C^{n\times n}$ 表示复数域上 $n\times n$ 阶矩阵的集合，C 表示复数全体，R 表示实数全体．上标 T 和 H 分别表示转置和共轭转置．Reλ、Imλ 分别表示复数 λ 的实部和虚部．$I^{(n)}$ 是 n 阶单位阵，$e_j^{(n)}$ 为其第 j 列，$I_j^{(n)}=(e_1^{(n)},\cdots,e_j^{(n)})\in C^{n\times j}$．在 n 容易推知的前提下，上标 (n) 将不标出．

§1. 引　言

在[3]中，我们讨论了多变量泛函 λ-矩阵的（列选主元）QR 分解中上三角阵的对角

* 1988 年 1 月 22 日收到.

元的可微性．本文将利用这个结果来研究临界点的计算问题．

假定 $A(\lambda, v)\in C^{n\times n}(\lambda\in C, v\in R$ 或 $v\in C)$ 的元素是变量 λ, v 的可微函数，研究满足

$$\det A(\lambda, v)=0 \tag{1.1}$$

的点 (λ, v)．方程(1.1)事实上确定了 λ, v 之间的某种关系，若视 v 为自变量，则可把 λ 看成是 v 的(多值)函数，记为 $\lambda(v)$．于是(1.1)可改写为

$$\det A(\lambda(v), v)=0. \tag{1.2}$$

现在，我们需要研究曲线 $\lambda(v)$ 在复平面上的变化情况，尤其要研究这个曲线与虚轴的交点，并找出此时(临界情形)的 v 及相应 λ 的值(注意到此时 $\mathrm{Re}\lambda=0$)．

上述问题产生于常微分方程的稳定性理论的研究中，其中 λ 与因子 $e^{\lambda t}$ 相联系而出现在方程的解中 (t 是时间)．显然，$\mathrm{Re}\lambda<0$ 与 $\mathrm{Re}\lambda>0$ 确定了解的稳定与否，因此，常常需要求出临界时 λ 和 v 的值，即 $\mathrm{Re}\lambda=0$ 情形时 λ 和 v 的值[1]．

在[1]中，Lancaster 在假定 $\lambda(v)$ 关于 v 是可微的情形下给出了三个供寻求临界点的算法，同时在[1]中列出了一个数值试验所产生的有关结果．在这些结果中，算法似乎是很有效的．其实不然，事实上，在[1]的数值试验中出现的收敛之慢、步长之小，使人们产生错觉，因为[1]中确定的临界时参数 λ 和 v 的值远非对应于临界情形(见本文 §4)．

本文 §2 是算法的基本思想；§3 讨论算法；最后为检验本文算法的有效性，在 §4 列出一些数值结果．

§2. 基本思想

这里主要是寻求一个与 $\det A(\lambda, v)$ 有相同零点在局部意义下可微的函数(通常不能显式写出)，然后对其求解．为此，本节仅考虑 $f(\lambda, v)\in C$ 是 $\lambda, v\in C$ (或 $v\in R$) 的可微函数，需要求解 λ 和 v 使

$$f(\lambda, v)=0,\ \mathrm{Re}\lambda=0. \tag{2.1}$$

令 (λ_0, v_0) 是满足(2.1)的某点 (λ_*, v_*) 的近似值，考察如何改进 (λ_0, v_0)，使之更接近 λ_* 和 v_*．注意

$$\begin{aligned} f(\lambda, v)&=f(\lambda_0, v_0)+f_\lambda(\lambda_0, v_0)(\lambda-\lambda_0)+f_v(\lambda_0, v_0)(v-v_0)\\ &\quad+0(\sqrt{|\lambda-\lambda_0|^2+|v-v_0|^2})\\ &\equiv a+b(\lambda-\lambda_0)+c(v-v_0)+0(\sqrt{|\lambda-\lambda_0|^2+|v-v_0|^2}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 f 的下标表示偏微商．在计算中，我们近似地认为在 (λ_0, v_0) 的邻域内

$$f(\lambda, v)\approx a+b(\lambda-\lambda_0)+c(v-v_0). \tag{2.3}$$

然后寻求满足一定要求的 λ, v 使

$$a+b(\lambda-\lambda_0)+c(v-v_0)=0. \tag{2.4}$$

具体求法，分两种情形加以论述．

情形 (i). $v\in C$，即 v 是复变量．此时，又分如下情况予以分别对待：

1) $b=0$ 或 $c=0$，但 $|b|^2+|c|^2\neq 0$．

此时，只能选取 λ, v 使 $|f(\lambda, v)|$ 更接近于零，而无法使 $|\mathrm{Re}\lambda|$ 尽可能小(见下面关

于 $b \neq 0$, $c \neq 0$ 的论述),故取

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{a\bar{b}}{|b|^2 + |c|^2}, \quad v = v_0 - \frac{a\bar{c}}{|b|^2 + |c|^2}. \tag{2.5}$$

这样选取的 λ, v 是方程(2.4)的所有解中满足

$$|\lambda - \lambda_0|^2 + |v - v_0|^2 = \min$$

的唯一解.

2) $b \neq 0$, $c \neq 0$.

2.1) 若 $|\mathrm{Re}\lambda_0| \leqslant \varepsilon$ (需要的精度),令 ($a_1, a_2 \in \mathbf{C}$ 待定)

$$a = a_1 + a_2, \tag{2.6}$$

且取

$$\lambda = \lambda_0 - a_1/b, \quad v = v_0 - a_2/c, \tag{2.7}$$

并使 $|\mathrm{Re}\lambda| \leqslant \varepsilon$. 取

$$a_1 = \eta b i, \ i = \sqrt{-1}, \ \eta \in \mathbf{R}. \tag{2.8}$$

为使一步迭代的步长不致于过大,选取 η 使

$$g(\eta) = |\lambda - \lambda_0|^2 + |v - v_0|^2 = \left|\frac{a - a_1}{c}\right|^2 + \left|\frac{a_1}{b}\right|^2$$

$$= \left(1 + \frac{|b|^2}{|c|^2}\right)\eta^2 + \frac{1}{|c|^2} \cdot 2\mathrm{Im}(\bar{a}b) \cdot \eta + \frac{|a|^2}{|c|^2} = \min.$$

于是由 $g'(\eta) = 0$ 得

$$\eta = -\mathrm{Im}(\bar{a}b)/(|b|^2 + |c|^2). \tag{2.9}$$

最后由(2.6)—(2.9)得出 λ 和 v.

2.2) 若 $|\mathrm{Re}\lambda_0| > \varepsilon$, 仍然从(2.6)—(2.7)出发,但要求

$$\mathrm{Re}\lambda = \mathrm{Re}\left(\lambda_0 - \frac{a_1}{b}\right) = 0,$$

即

$$\mathrm{Re}\lambda_0 = \mathrm{Re}\,\frac{a_1}{b}. \tag{2.10}$$

令

$$a_1 = \xi + \eta i, \ \xi, \eta \in \mathbf{R}, \tag{2.11}$$

则由(2.10)得

$$\mathrm{Re}\lambda_0 = \frac{1}{|b|^2}(\xi \mathrm{Re}b + \eta \mathrm{Im}b). \tag{2.12}$$

此时,若 $|\mathrm{Re}b| \geqslant |\mathrm{Im}b|$, 则令

$$x = \mathrm{Im}b/\mathrm{Re}b, \tag{2.13}$$

于是

$$\xi = (|b|^2 \mathrm{Re}\lambda_0 - \eta \mathrm{Im}b)/\mathrm{Re}b. \tag{2.14}$$

同样,取 η 使

$$g(\eta) = \left|\frac{a_1}{b}\right|^2 + \left|\frac{a - a_1}{c}\right|^2 = \min.$$

通过简单计算可知

$$g'(\eta)=\left(\frac{1}{|b|^2}+\frac{1}{|c|^2}\right)\left[2\eta(1+x^2)-2\frac{|b|^2}{\mathrm{Re}b}x\mathrm{Re}\lambda_0\right]$$
$$-\frac{2}{|c|^2}(\mathrm{Im}a-x\mathrm{Re}a).$$

由 $g'(\eta)=0$ 可得

$$\eta=\left[\frac{|b|^2}{\mathrm{Re}b}x\mathrm{Re}\lambda_0+\frac{|b|^2}{|b|^2+|c|^2}(\mathrm{Im}a-x\mathrm{Re}a)\right]\Big/(1+x^2). \tag{2.15}$$

最后由(2.6)—(2.7)和(2.11)—(2.15)即得 λ, v.

其次,若 $|\mathrm{Re}b|<|\mathrm{Im}b|$，则令

$$y=\mathrm{Re}b/\mathrm{Im}b, \tag{2.16}$$

于是

$$\eta=(|b|^2\mathrm{Re}\lambda_0-\xi\mathrm{Re}b)/\mathrm{Im}b. \tag{2.17}$$

取ξ,使

$$g(\xi)=\left|\frac{a_1}{b}\right|^2+\left|\frac{a-a_1}{c}\right|^2=\min,$$

类似可得

$$\xi=\left[\frac{|b|^2}{\mathrm{Im}b}\cdot y\mathrm{Re}\lambda_0+\frac{|b|^2}{|b|^2+|c|^2}(\mathrm{Re}a-y\mathrm{Im}a)\right]\Big/(1+y^2). \tag{2.18}$$

结合(2.6)—(2.7),(2.16)—(2.18)和(2.11)便得 λ 和v.

情形 (ii). $v\in R$，即 v 是实变量.

在这种情形下，常假定在每步迭代中令 $\mathrm{Re}\lambda=0$ (当然有 $\mathrm{Re}\lambda_0=0$)，于是 (2.4) 变成一个 2×2 阶线性方程组

$$\begin{pmatrix}-\mathrm{Im}b & \mathrm{Re}c\\ \mathrm{Re}b & \mathrm{Im}c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda-\lambda_0}{i}\\ v-v_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathrm{Re}a\\ -\mathrm{Im}a\end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

(2.19)是否有解,主要取决于系数矩阵是否可逆. 本文 §4 中列出的数值结果，是通过对方程(2.19)采用如下方法求解而获得的.

首先,若

$$s=-\mathrm{Im}b\cdot\mathrm{Im}c-\mathrm{Re}b\cdot\mathrm{Re}c \tag{2.20}$$

满足 $|s|>\varepsilon_0$ (某控制参数),则取

$$\lambda=\lambda_0-i(\mathrm{Im}c\cdot\mathrm{Re}a-\mathrm{Re}c\cdot\mathrm{Im}a)/s,$$
$$v=v_0-(-\mathrm{Re}b\cdot\mathrm{Re}a-\mathrm{Im}b\cdot\mathrm{Im}a)/s. \tag{2.21}$$

否则 $|s|\leqslant\varepsilon_0$，就认为(2.19)中的系数矩阵是奇异的. 此时只能求(2.19)的最小二乘解. 设

$$\max\{|\mathrm{Re}c|,|\mathrm{Im}c|\}\leqslant\max\{|\mathrm{Im}b|,|\mathrm{Re}b|\} \tag{2.22}$$

和

$$|\mathrm{Re}b|\leqslant|\mathrm{Im}b|, \tag{2.23}$$

则令(显然,若 $\mathrm{Im}b=0$，则表示 $b=c=0$. 此处不考虑)

$$k = -\mathrm{Re}c/\mathrm{Im}b.$$

现在,近似地认为(2.19)的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{Im}b & -k\mathrm{Im}b \\ \mathrm{Re}b & k\mathrm{Re}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{Im}b \\ \mathrm{Re}b \end{pmatrix}(1, k),$$

其 Moore-Penrose 广义逆为[2]

$$\frac{1}{(1+k^2)|b|^2}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}(-\mathrm{Im}b, \mathrm{Re}b).$$

于是就取

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{1}{(1+k^2)|b|^2}(-\mathrm{Im}b\cdot\mathrm{Re}a + \mathrm{Re}b\cdot\mathrm{Im}a)i,$$

$$v = v_0 - \frac{k}{(1+k^2)|b|^2}(-\mathrm{Im}b\cdot\mathrm{Re}a + \mathrm{Re}b\cdot\mathrm{Im}a). \tag{2.24}$$

对于异于(2.22)或(2.23)的情形,可仿此给出类似于(2.24)的迭代公式.

上面，我们讨论了如何改进已知的一对近似值，以获得更好的近似值. 但在实际计算中,当不知较好的初始近似时，往往对开始的几步步长略加控制(类似于 Newton 下山法[3]). 为了简洁起见,下面将上述公式整理归纳如下.

$$\text{情形 (i): } v\in\mathbf{C}\quad \left\{\begin{array}{l}
\text{① 若 } b=0 \text{ 或 } c=0 \text{ 但 } |b|^2+|c|^2\neq 0\text{, 取} \\
\qquad \lambda = \lambda_0 - \dfrac{a\bar{b}}{|b|^2+|c|^2},\quad v = v_0 - \dfrac{a\bar{c}}{|b|^2+|c|^2}. \\
\text{② 若 } b\neq 0,\ c\neq 0. \left\{\begin{array}{l}
\text{1) 若 } |\mathrm{Re}\lambda_0|\leqslant\varepsilon \text{ (需要的精度),取 } (i=\sqrt{-1}) \\
\qquad \lambda = \lambda_0 - \eta i,\quad v = v_0 - \dfrac{a-\eta bi}{c},\quad \eta = -\dfrac{\mathrm{Im}(\bar{a}b)}{|b|^2+|c|^2}. \\
\begin{array}{l} \text{2) 若 } |\mathrm{Re}\lambda_0|>\varepsilon\text{,} \\ \text{取} \\ \lambda = \lambda_0 - \dfrac{a_1}{b}, \\ v = v_0 - \dfrac{a-a_1}{c}, \\ a_1 = \xi + \eta i. \end{array}
\left\{\begin{array}{l}
\text{(1) 若 } |\mathrm{Re}b|\geqslant|\mathrm{Im}b|\text{, 取} \\
\quad x = \mathrm{Im}b/\mathrm{Re}b, \\
\quad \xi = (|b|^2\mathrm{Re}\lambda_0 - \eta\mathrm{Im}b)/\mathrm{Re}b, \\
\quad \eta = \left[\dfrac{|b|^2}{\mathrm{Re}b}x\mathrm{Re}\lambda_0 + \dfrac{|b|^2}{|b|^2+|c|^2} \times (\mathrm{Im}a - x\mathrm{Re}a)\right]\Big/(1+x^2). \\
\text{(2) 若 } |\mathrm{Re}b|<|\mathrm{Im}b|\text{, 取} \\
\quad y = \mathrm{Re}b/\mathrm{Im}b, \\
\quad \eta = (|b|^2\mathrm{Re}\lambda_0 - \xi\mathrm{Re}b)/\mathrm{Im}b, \\
\quad \xi = \left[\dfrac{|b|^2}{\mathrm{Im}b}y\mathrm{Re}\lambda_0 + \dfrac{|b|^2}{|b|^2+|c|^2}(\mathrm{Re}a - y\mathrm{Im}a)\right]\Big/(1+y^2).
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

情形 (ii): $v \in \mathbf{R}$. (令 $s = -\mathrm{Im}b \cdot \mathrm{Im}c - \mathrm{Re}b \cdot \mathrm{Re}c$)

① 若 $|s| > \varepsilon_0$ (某控制参数)，取
$\lambda = \lambda_0 - i(\mathrm{Im}c \cdot \mathrm{Re}a - \mathrm{Re}c \cdot \mathrm{Im}a)/s$,
$v = v_0 + (\mathrm{Re}b \cdot \mathrm{Re}a - \mathrm{Im}b \cdot \mathrm{Im}a)/s$.

② 若 $|s| \leqslant \varepsilon_0$.

1) 若 $|\mathrm{Im}b| = \max\{|\mathrm{Im}b|, |\mathrm{Re}b|, |\mathrm{Re}c|, |\mathrm{Im}c|\}$，取 $k = -\mathrm{Re}c/\mathrm{Im}b$, $\delta = \dfrac{1}{(1+k^2)|b|^2}(-\mathrm{Im}b \cdot \mathrm{Re}a + \mathrm{Re}b \cdot \mathrm{Im}a)$, $\lambda = \lambda_0 - \delta i$, $v = v_0 - k\delta$.

2) 若 $|\mathrm{Re}b| = \max\{|\mathrm{Im}b|, |\mathrm{Re}b|, |\mathrm{Re}c|, |\mathrm{Im}c|\}$，取 $k = \mathrm{Im}c/\mathrm{Re}b$，余同 1).

3) 若 $|\mathrm{Re}c| = \max\{|\mathrm{Im}b|, |\mathrm{Re}b|, |\mathrm{Re}c|, |\mathrm{Im}c|\}$，取 $l = -\mathrm{Im}b/\mathrm{Re}c$，$\delta = \dfrac{1}{(1+l^2)|c|^2}(\mathrm{Re}c \cdot \mathrm{Re}a + \mathrm{Im}c \cdot \mathrm{Im}a)$，$\lambda = \lambda_0 + l\delta i$，$v = v_0 + \delta$.

4) 若 $|\mathrm{Im}c| = \max\{|\mathrm{Im}b|, |\mathrm{Re}b|, |\mathrm{Re}c|, |\mathrm{Im}c|\}$，取 $l = \mathrm{Re}b/\mathrm{Im}c$，余同 3).

注 2.1. 上面叙述了如何由一个近似点求得另一新的近似点. 由此不难写出一个迭代算法. 在一定条件下，这个算法的收敛阶是 2. 例如，$f(\lambda, v)$ 二阶可微，要逼近的解为 (λ_*, v_*)，若 $f_{v_*} \neq 0$，则对应于情形 (i)，收敛是二阶的；若对应于 (λ_*, v_*) 所得的 (2.19)式左边的 2×2 阶矩阵非奇异，则对应于情形 (ii)，收敛也是二阶的.

注 2.2. 以上至少假定 $f(\lambda, v)$ 是可微的. 事实上，这个条件还可放宽，与[3]中所做的分析类似，这里只需假设 $f(\lambda, v)$ 在任一点 (λ_0, v_0) 附近可写为

$$f(\lambda, v) = |f_{00}(\lambda_0, v_0) + f_{11}(\lambda_0, v_0)(\lambda - \lambda_0) + f_{12}(\lambda_0, v_0)(v - v_0) + 0(\sqrt{|\lambda - \lambda_0|^2 + |v - v_0|^2})|, \tag{2.25}$$

然后仍用上述的基本思想构造迭代公式；并且当 $0(\sqrt{|\lambda - \lambda_0|^2 + |v - v_0|^2})$ 可改换为 $0(|\lambda - \lambda_0|^2 + |v - v_0|^2)$ 时，还可望收敛是二阶的(见注 2.1).

§3. 算　法

设 $A(\lambda, v) \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是 λ 和 v 的可微泛函 (λ, v)-矩阵. 在[3]中，我们证明了：若 (λ_0, v_0) 使得 $\det A(\lambda_0, v_0) \neq 0$ 或是 $A(\lambda_0, v_0)\pi$ 的前 $n-1$ 列线性无关，则存在 λ_0 和 v_0 的邻域 $\mathscr{B}_\lambda(\lambda_0)$ 和 $\mathscr{B}_v(v_0)$，使 $A(\lambda, v)\pi$ 有一 QR 分解

$$A(\lambda, v)\pi = Q(\lambda, v)R(\lambda, v),\ \lambda \in \mathscr{B}_\lambda(\lambda_0),\ v \in \mathscr{B}_v(v_0). \tag{3.1}$$

满足上三角阵 $R(\lambda, v)$ 的对角元在 $\lambda = \lambda_0$, $v = v_0$ 点可微，并且

$$e_n^T R(\lambda, v) e_n = e_n^T R_0 e_n + \Big[e_n^T Q_0^H \frac{\partial}{\partial \lambda} A(\lambda, v)\Big|_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ v=v_0}} \pi e_n - e_n^T Q_0^H \frac{\partial}{\partial \lambda} A(\lambda, v)\Big|_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ v=v_0}} \pi I_{n-1}(I_{n-1}^T R_0 I_{n-1})^{-1} I_{n-1}^T R_0 e_n \Big](\lambda - \lambda_0)$$
$$+ \Big[e_n^T Q_0^H \frac{\partial}{\partial v} A(\lambda, v)\Big|_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ v=v_0}} \pi e_n - e_n^T Q_0^H \frac{\partial}{\partial v} A(\lambda, v)\Big|_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ v=v_0}}$$

$$\times\pi I_{n-1}(I_{n-1}^T R_0 I_{n-1})^{-1} I_{n-1}^T R_0 e_n](v-v_0)$$
$$+\,o(\sqrt{|\lambda-\lambda_0|^2+|v-v_0|^2}), \tag{3.2}$$

其中 π 为置换阵，$Q_0=Q(\lambda_0, v_0)$，$R_0=R(\lambda_0, v_0)$. 当 $A(\lambda, v)$ 的元素二阶可微时，(3.2)中的余项可以改写成 $0(|\lambda-\lambda_0|^2+|v-v_0|^2)$.

根据上述结果，我们给出一个计算临界点的算法.

算法. 计算 $A(\lambda, v)\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 的临界点 (λ_*, v_*).

a) 给定可微的 $A(\lambda, v)\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 及其临界点 (λ_*, v_*) 的初始近似 (μ_0, ω_0).

b) 计算 $A(\mu_i, \omega_i)$，$\left.\dfrac{\partial}{\partial\lambda}A(\lambda, v)\right|_{\substack{\lambda=\mu_i\\ v=\omega_i}}\equiv A_\lambda^{(i)}$ 和 $\left.\dfrac{\partial}{\partial v}A(\lambda, v)\right|_{\substack{\lambda=\mu_i\\ v=\omega_i}}\equiv A_v^{(i)}$, $i=0,1,\cdots$.

c) 对 $A(\mu_i, \omega_i)$ 进行列选主元 QR 分解[4]：

$$A(\mu_i, \omega_i)\pi_i = Q_i R_i,\ Q_i\in \mathscr{U}_n,$$

$$R_i=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n-1 & 1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} R_{11}^{(i)} & R_{12}^{(i)} \\ \hline 0 & r_{nn}^{(i)} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} n-1 \\ 1 \end{array}.$$

d) 计算

$$r_\lambda^{(i)} = e_n^T Q_i^H A_\lambda^{(i)}\pi_i e_n - e_n^T Q_i^H A_\lambda^{(i)}\pi_i I_{n-1} R_{11}^{(i)-1} R_{12}^{(i)},$$
$$r_v^{(i)} = e_n^T Q_i^H A_v^{(i)}\pi_i e_n - e_n^T Q_i^H A_v^{(i)}\pi_i I_{n-1} R_{11}^{(i)-1} R_{12}^{(i)}.$$

e) 分别限定 $v\in\mathbf{C}$ 或 $v\in\mathbf{R}$，采用 §2 中的方法求解

$$r_{nn}^{(i)} + r_\lambda^{(i)}(\lambda-\mu_i) + r_v^{(i)}(v-\omega_i) = 0,$$

得出 μ_{i+1} 和 ω_{i+1}.

f) 如果已达所需精度，结束迭代；否则转 b).

注 3.1. 上面的算法是通过列选主元 QR 分解产生一个与 $\det A(\lambda, v)$ 有相同零点的函数，然后对其进行求解. 同样可以将 §2 的方法直接应用于函数

$$f(\lambda, v)=\det A(\lambda, v) \tag{3.3}$$

本身，此时 f_λ 和 f_v 可显式写出[1].

注 3.2. 关于算法的收敛性问题，要指出的是在适当条件下，收敛阶可以达到二阶. 例如 $A(\lambda, v)$ 的元素二阶可微，$A(\lambda_*, v_*)$ 的秩为 $n-1$，并且对应于 $A(\lambda_*, v_*)$ 进行列选主元 QR 分解而算出的相应于算法中 d) 步的两个数，满足适当条件(可由注 2.1 获得)时，收敛是二阶的. 关于这一点，已为数值例子所证实.

§4. 数 值 例 子

为试验算法的实际效果，考察例子[1]

$$A(\lambda, v)=A\lambda^2+(Bv+D)\lambda+(cv^2+E), \tag{4.1}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} 0.9505 & -0.001002 & 0 & 0 \\ -0.00856 & 0.30212 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0.0615 & -0.003783 & 0 & 0 \\ -0.03323 & 0.20380 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} -0.031 & -0.4846 & 0 & 0 \\ 0.16168 & 1.00000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05636 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0303 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5263 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 0.7494 & -0.00196 & -0.001 & 0 \\ -0.0168 & 0.22545 & 0.1804 & 0 \\ -0.0098 & 0.26303 & 0.4528 & 0.2727 \\ 0 & 0 & -0.4739 & 0.53289 \end{pmatrix}.$$

Lancaster 用[1]中的三个算法，取初始近似 $\mu_0=0.88i$，$\omega_0=0.6$ 进行 6—8 次迭代，并根据算出的结果得出一个临界点 $(v\in\mathbb{R})$

$$\lambda_s\approx 0.88764557i,\ v_s\approx 0.6475355374. \tag{4.2}$$

[1]中的三个表足以使人相信这个近似值是相当精确的，其实不然，通过对 $A(\lambda_s, v_s)$ 进行的列选主元 QR 分解得出，此时上三角阵的最小对角元(指绝对值而言) $|r_{44}|\approx 0.2175\times 10^{-1}$，于是 $A(\lambda_s, v_s)$ 的最小奇异值 $\sigma_{\min}\geqslant 2.7\times 10^{-3}$[6]. 因此，一般不能将 $A(\lambda_s, v_s)$ 视为奇异的. 事实上，由表 1 可以看出，(4.2)与 $A(\lambda,v)$ 的任一临界点相差都很大.

表 1 和 2 中与 $\delta\lambda_s$，δv_s 和 $r_{44}^{(s)}$ 相对应列出的仅是其相应的数量级，此处，说数 ξ 的数量级是 10^{-k}，意指

表 1　$v\in\mathbb{R}$

No.	初始值		迭代次数 (s)	计算值		$\delta\lambda_s$	δv_s	$r_{44}^{(s)}$
	λ_0	v_0		λ_s	v_s			
1	$0.8876455709i$	0.6475355374	5	$0.887837365104i$	-0.0042209860961	10^{-9}	10^{-7}	10^{-8}
2	$0.88i$	0.6	6	$0.887837365392i$	-0.00422100112	10^{-9}	10^{-8}	10^{-9}
3	$0.5i$	-0.5	5	$0.887837369802i$	-0.0042209295174	10^{-8}	10^{-7}	10^{-7}
4	$3i$	1	5	$0.887837365644i$	-0.004221014220	10^{-10}	10^{-8}	10^{-9}
5	i	0	4	$1.08060570601i$	-0.276269656696	16^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
6	$2i$	0	4	$1.08060613410i$	-0.276269250256	10^{-7}	10^{-8}	10^{-7}
7	$0.7i$	-0.4	8	$1.08060616416i$	-0.276269242896	10^{-9}	10^{-9}	10^{-9}
8	$100i$	0.6	10	$1.08060616401i$	-0.276269241047	10^{-9}	10^{-8}	10^{-8}
9	$10i$	10	8	$0.887837364443i$	-0.004220951560	10^{-8}	10^{-7}	10^{-8}
10	i	-1	5	$0.887837365398i$	-0.004221001445	10^{-9}	10^{-8}	10^{-9}

注. 计算中，取相应于§2中情形 (ii) 的 $\varepsilon_0=0.5\times 10^{-2}$.

表2 $v \in C$

No.	初始值		迭代次数 (s)	计算值		$\delta\lambda_s$	δv_s	$r_{44}^{(s)}$
	λ_0	v_0		λ_s	v_s			
1	$0.8876455709i$	0.6475355374	3	$0.888647656928i$	0.5287073360 $-0.3906605927i$	10^{-8}	10^{-6}	10^{-7}
2	$0.88i$	0.6	3	$0.886049725487i$	0.4674767352 $-0.4119380919i$	10^{-7}	10^{-6}	10^{-7}
3	i	-1	3	$0.905623818717i$	-0.858620519 $-0.4186859403i$	10^{-9}	10^{-8}	10^{-8}
4	i	1	3	$0.904806158843i$	0.8886641761 $-0.3369886613i$	10^{-8}	10^{-7}	10^{-8}
5	i	0	4	$1.02317134244i$	-0.2074063332 $+0.0343583054i$	10^{-11}	10^{-8}	10^{-9}
6	$2i$	0	5	$1.01760622880i$	-0.200740931 $+0.0385833885i$	10^{-9}	10^{-9}	10^{-9}
7	$10i$	10	4	$10.8669520206i$	5.913966046 $-1.234095428i$	10^{-8}	10^{-8}	10^{-7}
8	$100i$	5	6	$35.4344172111i$	19.34464360 $-3.901294534i$	10^{-8}	10^{-8}	10^{-6}

$$0.1 \times 10^{-k} \leqslant |\xi| < 10^{-k}, \tag{4.3}$$

其中 $\delta\lambda_s$, δv_s 表示第 $s+1$ 次迭代所产生的分别对 λ_s 和 v_s 的改进量,即

$$\lambda_{s+1} = \lambda_s - \delta\lambda_s,\ \ v_{s+1} = v_s - \delta v_s. \tag{4.4}$$

作者是在孙继广老师指导下完成这个工作的,谨在此表示衷心的感谢.

参考文献

[1] P. Lancaster, Lambda-Matrices and Vibrating Systems, Pergamon Press, 1966.
[2] 孙继广,矩阵扰动分析,科学出版社, 1987.
[3] 李仁仓, QR 分解与非线性特征值问题,计算数学, **11**: 4(1989),374—385.
[4] G.H. Golub, C., Van Loan, Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, 1983.
[5] 曹志浩,张玉德,李瑞遐,矩阵计算与方程求根,人民 育出版社, 1979.
[6] C.L. Lawson, R.J., Hanson, Solving Least Squares Problems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1974.